

Verbindung von Arithmetik und Geometrie — Chance zur Realisierung eines kindorientierten Mathematikunterrichts

Prof. Dr. Klaus-Peter Eichler

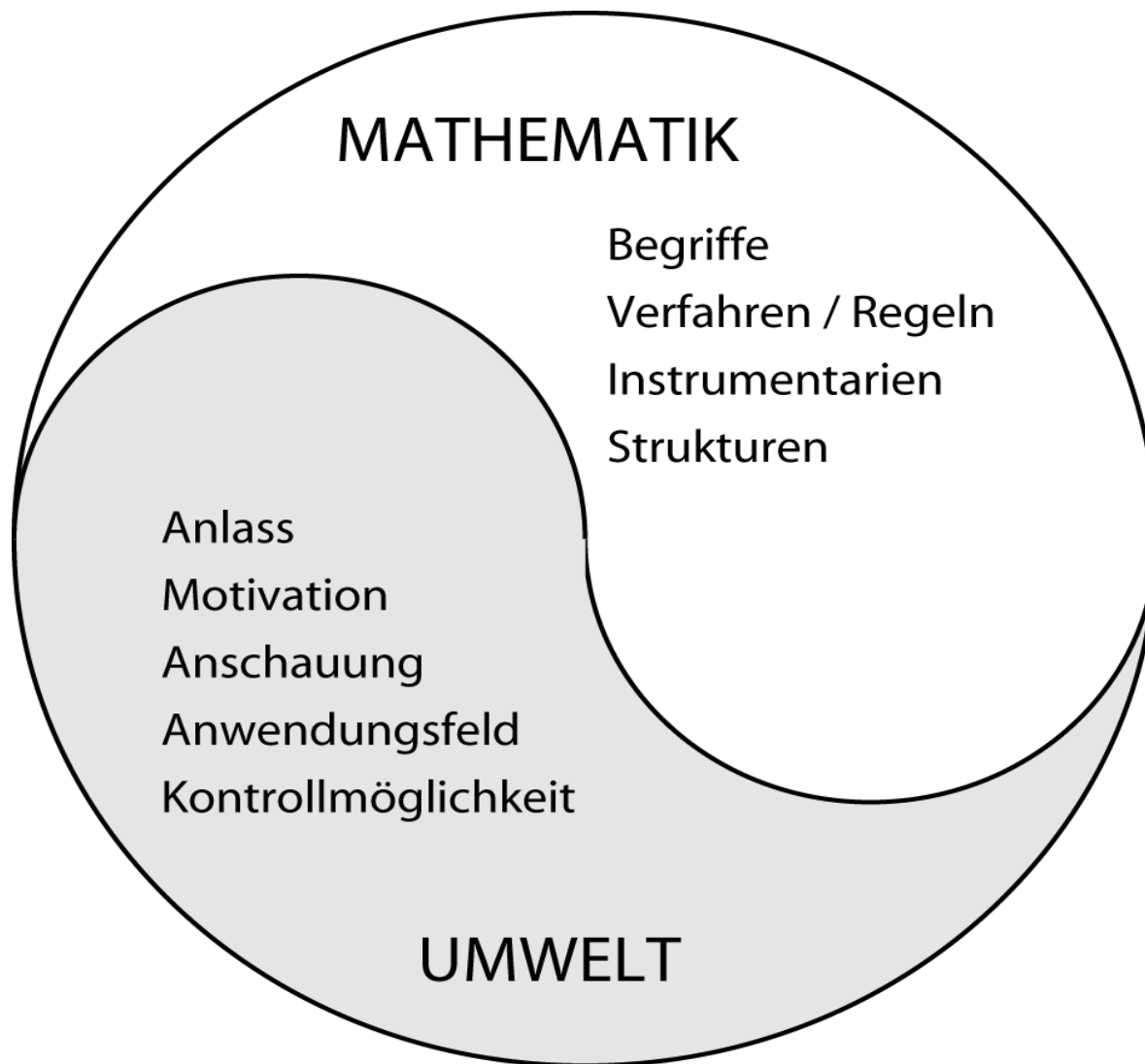
University of Education Schwäbisch Gmünd
& NORD University Bodø

www.mathematikus.de



NORD
University

Die Welt, die Mathematik und dazwischen das Kind.



Lösung I - echte Sachkontexte



St. Peter in Zürich.

Die Turmuhr mit dem größten Zifferblatt in Europa.

Durchmesser: 8.64 m

Wie lang ist der Weg, den die Zeigerspitze in einer Minute zurücklegt?

Lösung I - echte Sachkontexte



Warum sind an vielen Brücken Dreiecke zu sehen?



Nimm 20 Blatt Papier A4 und etwas Leim.

Baue eine daraus Brücke.

Wer baut die Brücke, die am meisten trägt?

Schätzen Sie: Wie viel, zum Beispiel wie viele Ziegelsteine kann so eine Brücke nur aus 20 Blatt Papier tragen?



Selbst eine solch stabile Brücke ist möglich!

Das Nutzen der Beziehungen zwischen Arithmetik und Geometrie

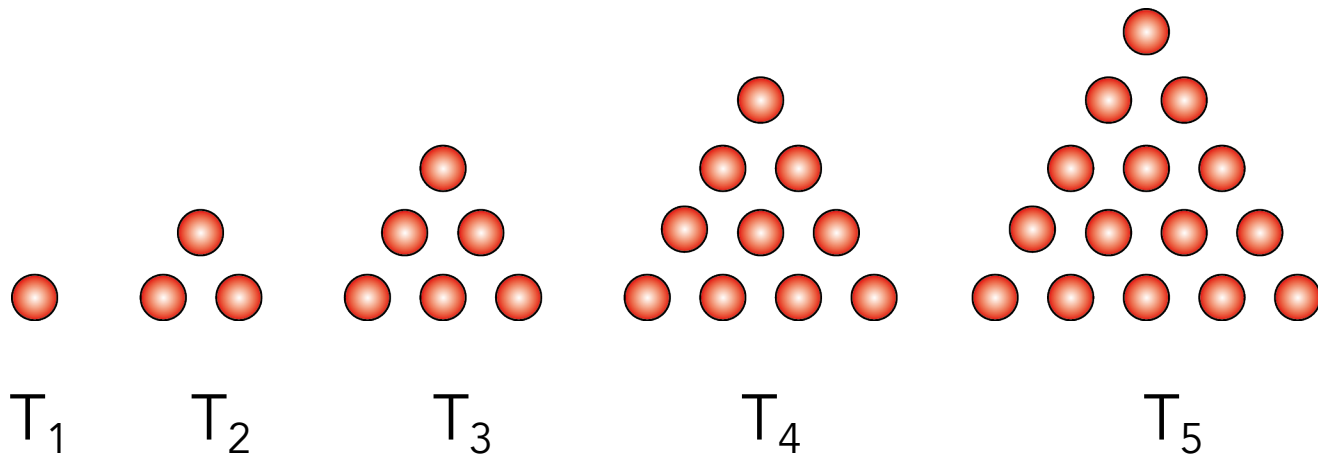
- macht arithmetische Fakten, Sätze, Beweise, etc. sichtbar,
- unterstützt die Konstruktion mentaler Bilder,
- fördert ein tieferes Verstehen und
- fördert die Fähigkeit zu mentalem visuellen Operieren.

Historische Anmerkungen

- Mathematik hat ihren eigenen epistemologischen Charakter.
- Seit der griechischen Antike war Beweisen (nicht Rechnen!!!) eine zentrale mathematische Aktivität. Beweisen stand im Zentrum der Gewinnung neuen Wissens.
- Die Möglichkeit der geometrischen Veranschaulichung durch Muster, Strecken und Flächen spielte eine bedeutende Rolle.
- Insbesondere das Studium von Zahlenmustern hatte seit der Zeit des Pythagoras von Samos (ca. 600-500 v.u.Z.) eine große Bedeutung.

Historische Anmerkungen

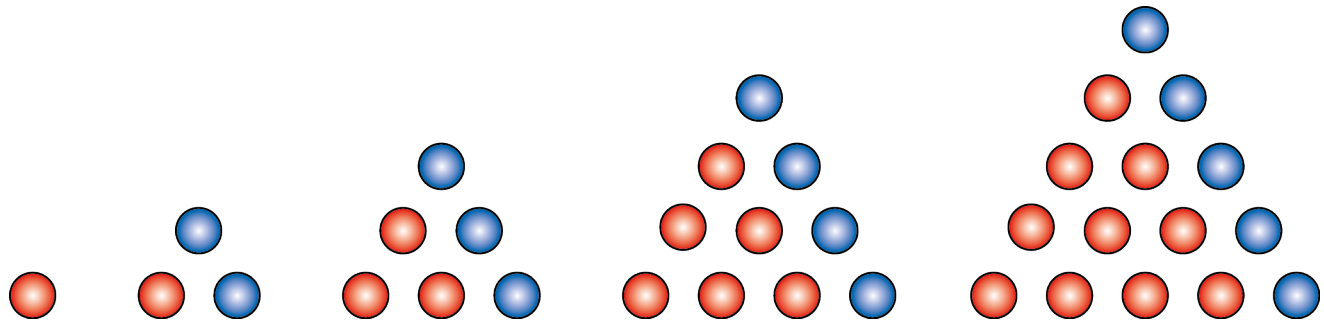
- Der Neu-Pythagoräer Nikomachos von Gerasa (ca. 60-120 u.Z.) untersuchte intensive so genannte figurierte Zahlen bzw. deren Bilder.



Die Folge der so genannten Dreieckszahlen

Historische Anmerkungen

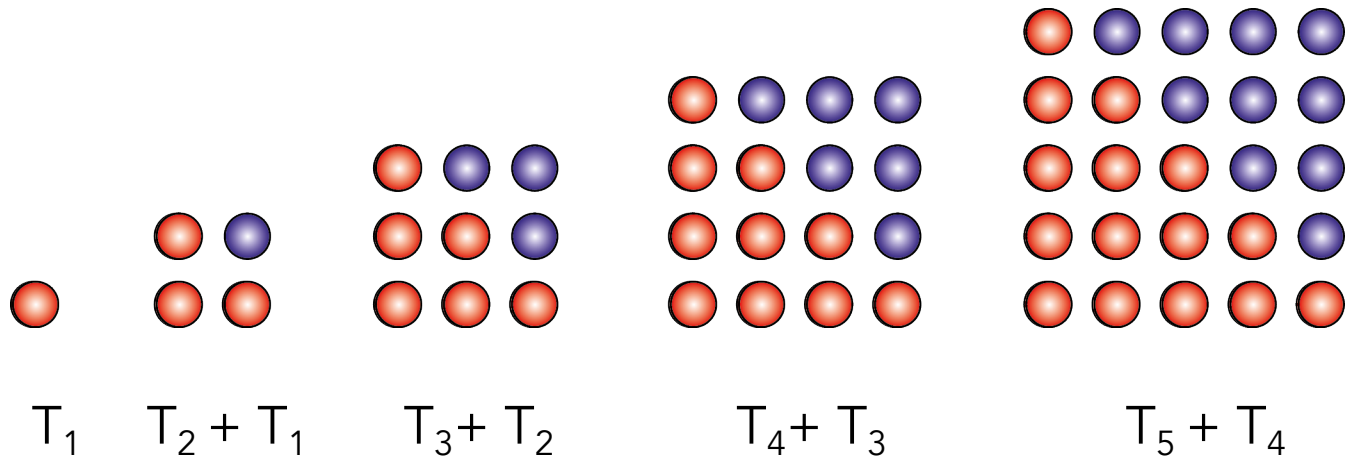
- Geschicktes Umlegen von (Punkt)mustern führte zu neuen Einsichten.



Die Folge der Dreieckszahlen und deren Bildung:
Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ergibt die n -te Dreieckszahl

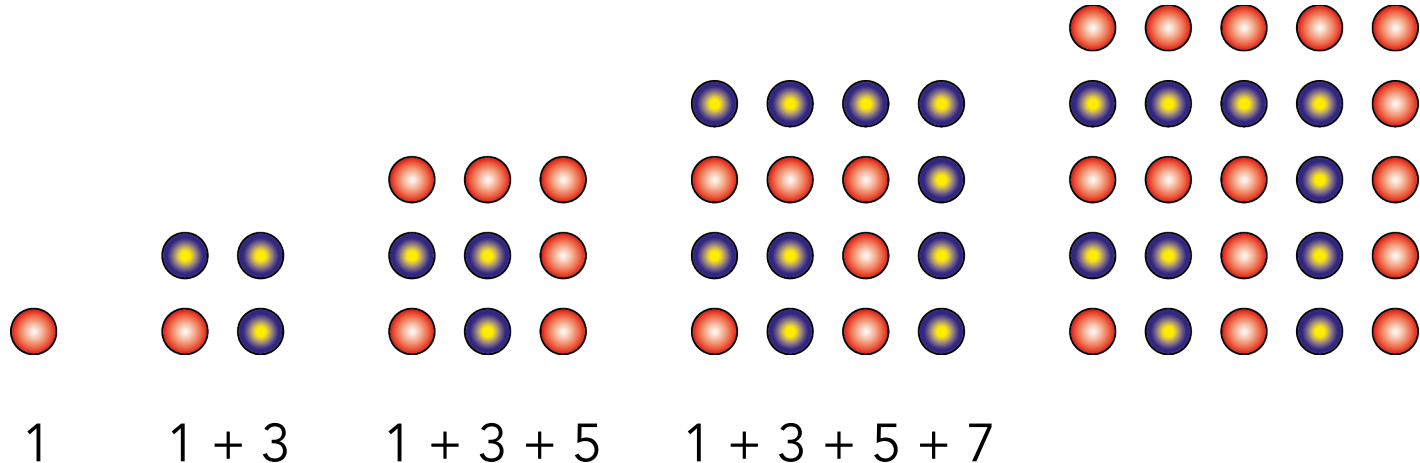
Historische Anmerkungen

- Geschicktes Umlegen von (Punkt)mustern führte zu neuen Einsichten.



Historische Anmerkungen

- Winkelhaken (so genannte Gnomons) wurden oft zur Visualisierung genutzt:



Welche Gleichung passt?

Historische Anmerkungen

- Auch später arbeiteten große Mathematiker oft mit der Technik der figurierten Zahlen oder anderen Visualisierungen.
- Z.B. Carl Friedrich Gauß (1777-1855):
- $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 =$



Gauß, porträtiert von Gottlieb Biermann (1887)

(c) Bild: A. Wittmann, Gauß-Gesellschaft Göttingen e.V.

Historische Anmerkungen: Gauß

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = 5050$$

Wie kommt man so schnell zum Ergebnis?

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

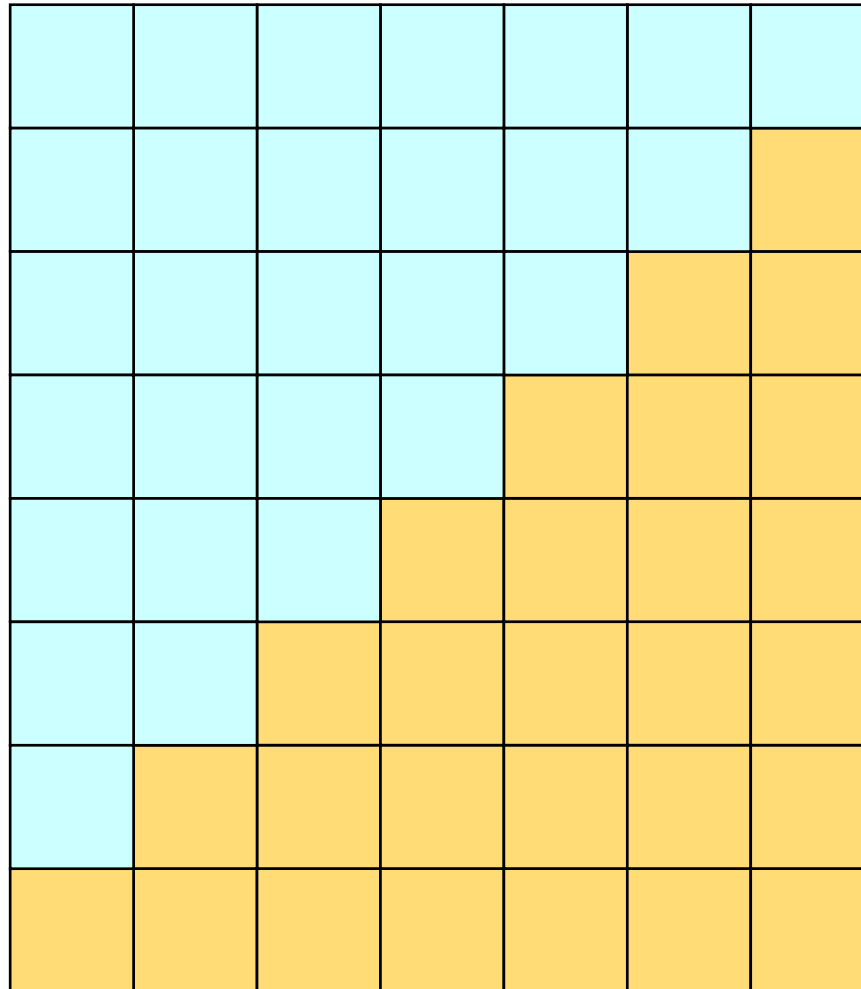
$$(100 \cdot 101) : 2 = 5050$$

Allgemein:

Zahl mal Nachfolger der Zahl geteilt durch 2

Die Gauß'sche Formel einsehen

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 7 \cdot (7 + 1) : 2$$



Lernen von Mathematik

Lernen von Mathematik ist ...

- ... ein Prozess aktiver eigener Sinnkonstruktion,
- ... ein sozialer Prozess,
- ... ein Prozess, der eine gezielte, *geleitete* Auseinandersetzung erfordert.

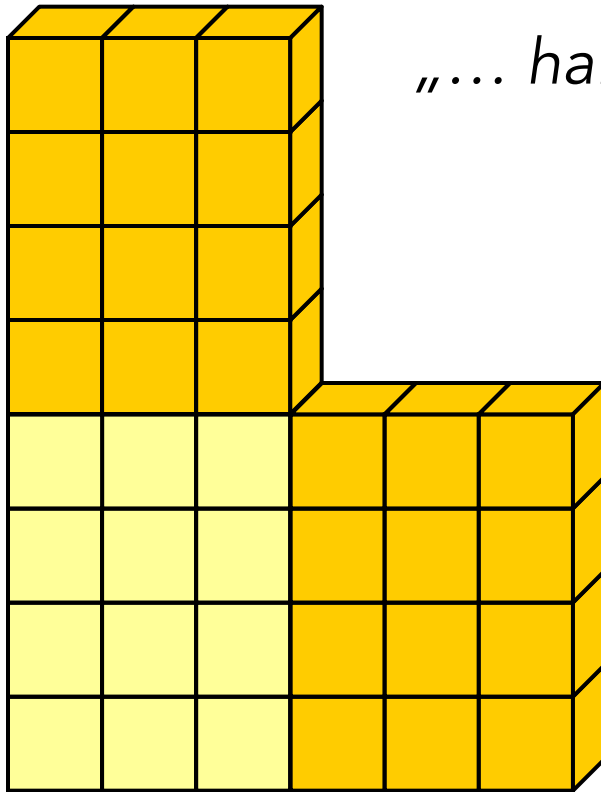
Aktive eigene Sinnkonstruktion

$$25 \cdot 36$$

$$100 \cdot 9 = 900$$

- „erlaubt“ die Lehrperson diesen „Trick“?
oder
- können die Kinder einsehen, warum das korrekt ist?

Aktive eigene Sinnkonstruktion



„... halb so hoch ist doppelt so breit.“

$$3 \cdot 86 \cdot 4$$

Aktive eigene Sinnkonstruktion

$$\underline{24 \cdot 36 = 624}$$

$$20 \cdot 30 = 600$$

$$4 \cdot 6 = 24$$

Zu oft: $24 \cdot 36 = (20+4) \cdot (30+6)$

und dann zu oft ohne Erklärung die Aussage, dass man die Klammern ausmultiplizieren muss, oder

“Man multipliziert jedes mit jedem ...”

Entscheidend ist: Kann das Kind das einsehen?

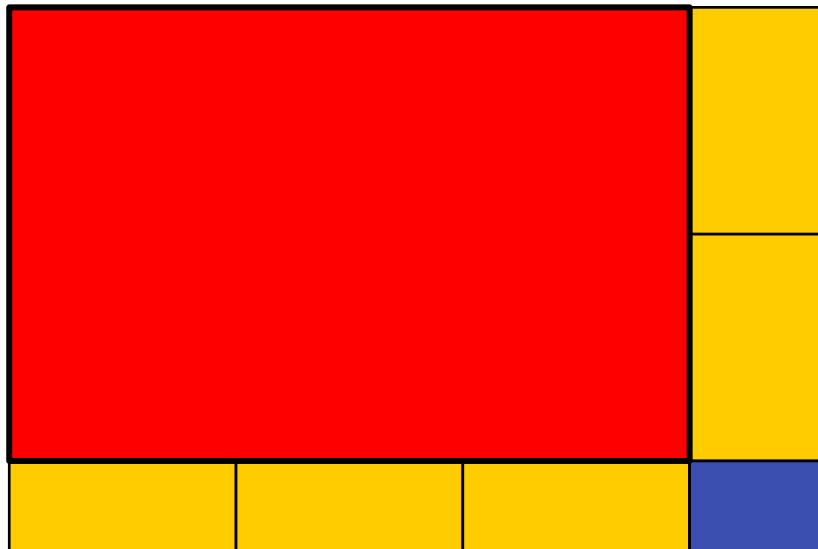
Aktive eigene Sinnkonstruktion

$$\underline{24 \cdot 36 = 624}$$

$$20 \cdot 30 = 600$$

$$4 \cdot 6 = 24$$

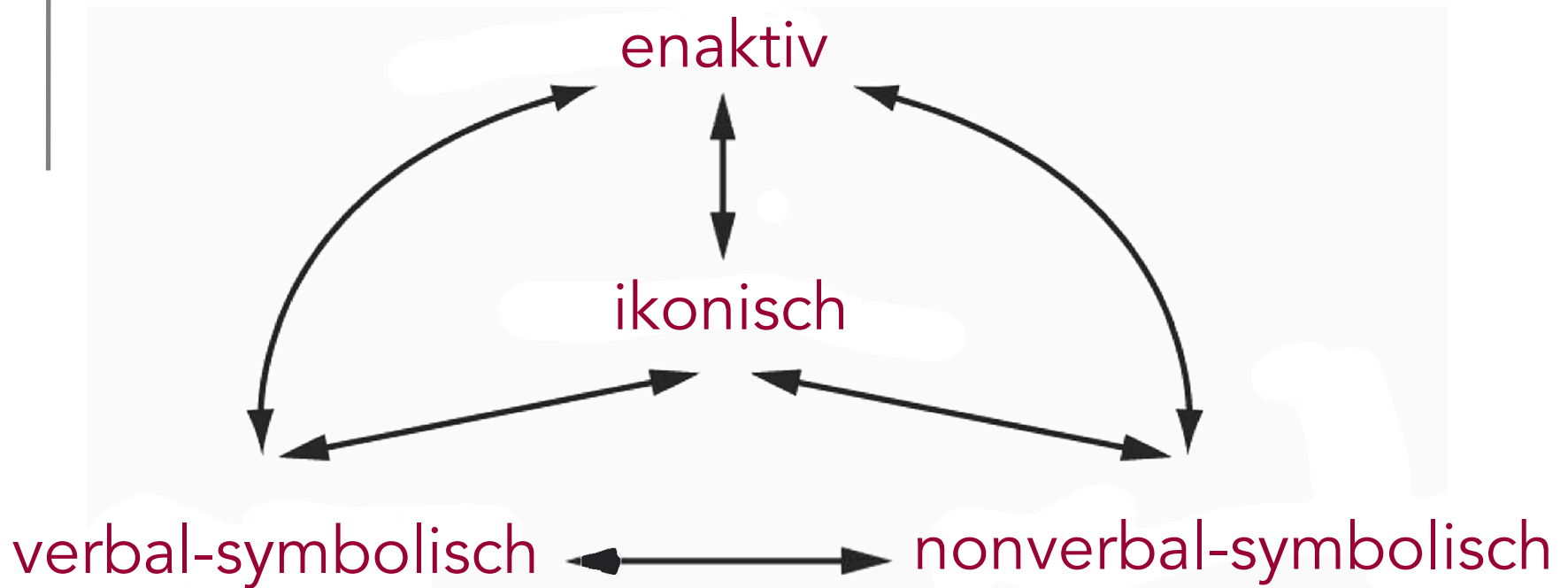
Wie kann das Kind den Weg einsehen?



Aktive eigene Sinnkonstruktion

- Warum ist $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$?
- Warum ist $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$?
- Wie findet man 25% eines Weges heraus?
- Wie berechnet man 25% von 360 €?

Ebenen der Repräsentation nach J. Bruner¹

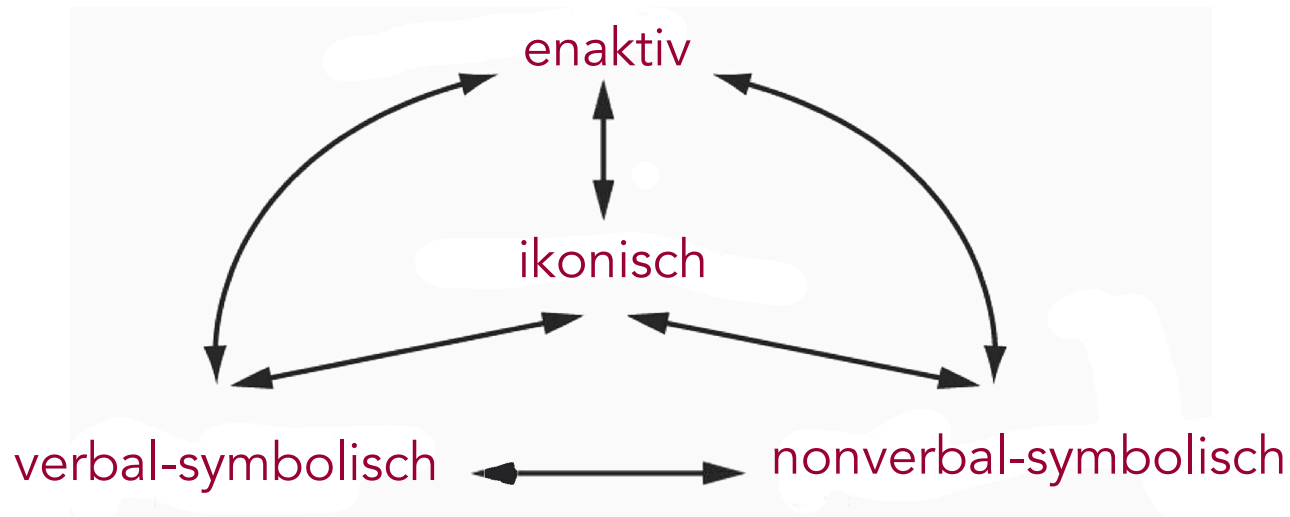


Von zentraler Bedeutung:

intermodalen Transfer mit passenden Aufgaben herausfordern,
verbal-symbolisch und nonverbal-symbolisch trennen
die enaktive Ebene ist kein "flüchtiges Durchgangsstadium"

¹ vgl. Bruner 1964, Schmidt, Melchior, Eichler, & Eid 1995

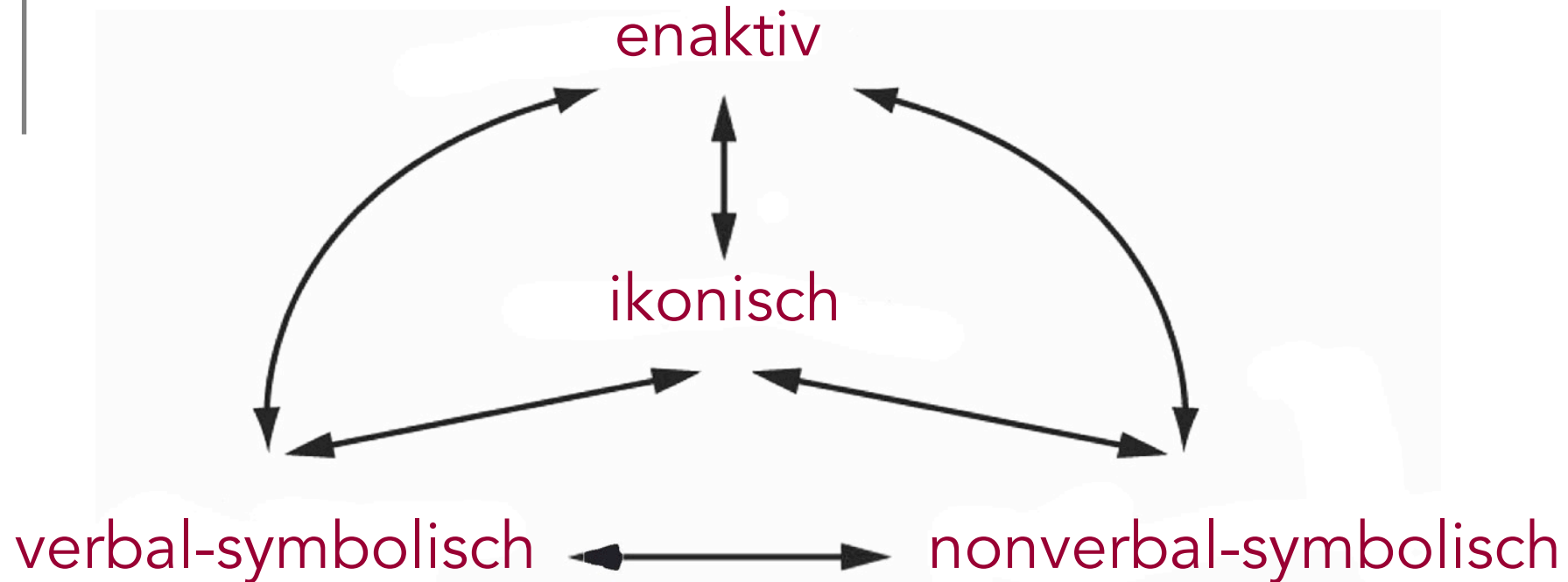
Ebenen der Repräsentation nach Bruner



Terme wie $3 + 4$ oder $3 \cdot 4$ sind

- dem Wesen nach Begriffe,
- gedankliche Widerspiegelungen von Klassen von Situationen der Umwelt,
- keine Aufforderungen, schnell 7 bzw. 12 zu schreiben.

Ebenen der Repräsentation nach Bruner



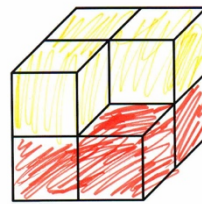
Operationsverständnis zu besitzen bedeutet, Terme wie $3 + 4$ oder $3 \cdot 4$ *identifizieren*, *realisieren* und *systematisieren* zu können.

¹ vgl. Bruner 1964, Schmidt, Melchior, Eichler, & Eid 1995

Festigen von Termen

Identifizieren von Termen wie $3 + 4$

enaktiv: Ein Bauwerk analysieren



ikonisch

verbal-symbolisch \longrightarrow nonverbal-symbolisch
 $3 + 4$

Festigen von Termen

Realisieren von Termen wie $3 + 4$

enaktiv: mit Würfeln so bauen,
dass es zum Term passt

ikonisch: etwas
Passendes malen

verbal-symbolisch: \leftarrow
eine Rechengeschichte
erfinden

nonverbal-symbolisch
 $3 + 4$


Festigen von Termen

Systematisieren von Termen wie $3 + 4$
mit oder ohne Referenz in einer anderen Ebene

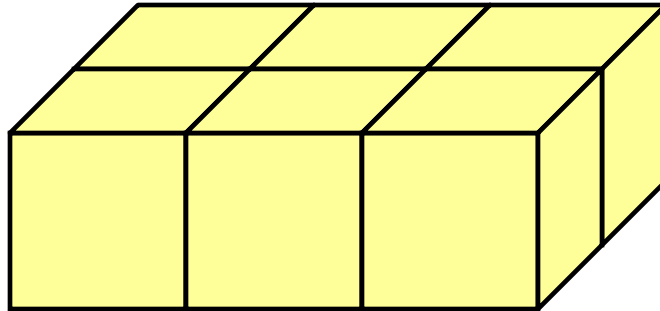
enaktiv: Ein Bauwerk verändern

ikonisch: eine Zeichnung
abändern, ergänzen

verbal-symbolisch \longleftrightarrow nonverbal-symbolisch
e.g. $3 + 4 \longleftrightarrow 3 + 3$
(one more)



Die Bedeutung von Termen verstehen

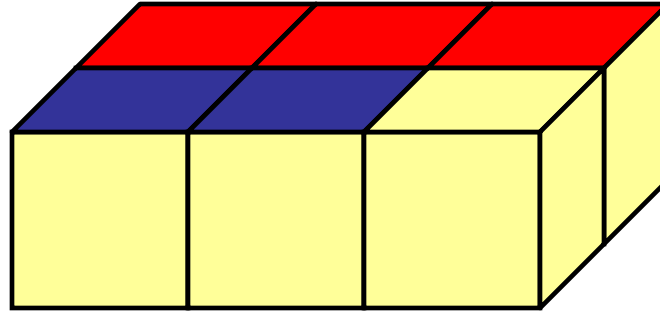


Paul hat gesagt, dass dazu die Aufgabe $3 \cdot 2$ passt.
Wie er das wohl gemeint?

Laura: „Drei mal 2 ist sechs“

I.: „kannst Du es mir zeigen?“

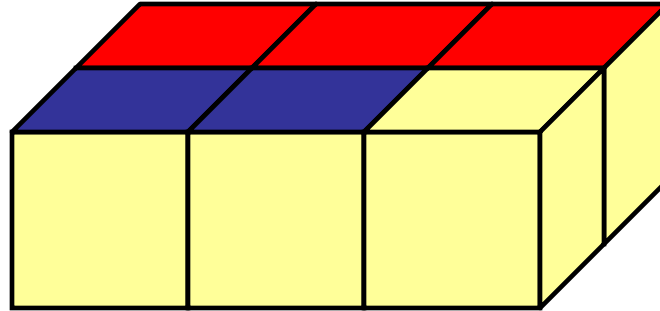
Die Bedeutung von Termen verstehen



Laura: „Da hinten sind 3“ (malt die drei an)

„Und hier sind 2. Drei mal 2 ist 6“
(malt vorn zwei Würfel an)

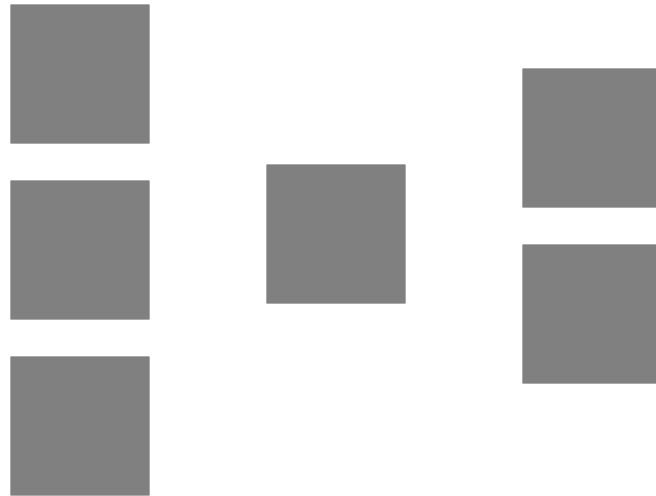
Die Bedeutung von Termen verstehen



I.: „Kannst Du mir hier drei mal zwei legen?“

Laura: „Ja, drei mal 2 ist 6“
(legt mit Würfeln)

Die Bedeutung von Termen verstehen



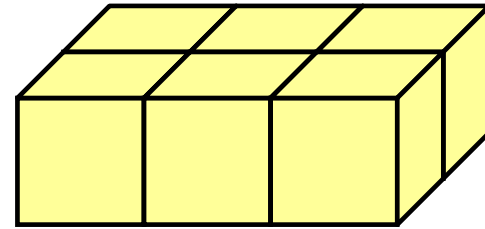
I.: „Ich sehe aber nur 5 Würfel“

Laura: „Eins, zwei, drei, vier, fünf“ (zögert)
„Drei mal 2 ist 6“ (legt einen Würfel)

I.: Was hast Du jetzt gelegt?

Laura: „Das Mal“

Die Bedeutung von Termen verstehen



Was zeigt das Beispiel?

- Handeln – und sei es noch so oft - reicht nicht aus.
- Zahl- und Operationsvorstellungen werden durch das *gedankliche Widerspiegeln* von Handlungen erworben.
- Dabei kommt der Sprache eine entscheidende Bedeutung zu: Kinder beschreiben
 - rückblickend ihr Handeln,
 - parallel zum Tun ihr Handeln und vor allem
 - vor der Handlung prognostizierend, was sie tun werden und warum sie das tun werden.

Fakten

Mentale Bilder unterstützen das Denken

Die Beziehung zwischen der Fähigkeit zu mentalem visuellen Operieren und der Rechenleistung ist gezeigt (vgl. etwa Lorenz 1992)

Geschätzt 80% der Kinder mit Dyskalkulie zeigen gering entwickelte Fähigkeiten zum Visualisieren.

INTERACTIONS BETWEEN NUMBER AND SPACE IN PARIETAL CORTEX

Edward M. Hubbard, Manuela Piazza, Philippe Pinel and Stanislas Dehaene

Abstract | Since the time of Pythagoras, numerical and spatial representations have been inextricably linked. We suggest that the relationship between the two is deeply rooted in the brain's organization for these capacities. Many behavioural and patient studies have shown that numerical–spatial interactions run far deeper than simply cultural constructions, and, instead, influence behaviour at several levels. By combining two previously independent lines of research, neuroimaging studies of numerical cognition in humans, and physiological studies of spatial cognition in monkeys, we propose that these numerical–spatial interactions arise from common parietal circuits for attention to external space and internal representations of numbers.

Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P., & Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience*, 6(6), 435- 448. doi:10.1038/nrn1684

Fakten

sory, world-centred representations of space^{144,145}. This implies that the same computational transformations that support spatial updating are crucial for arithmetic operations that create shifts in the locus of activation along an internal number line (FIGS 4 and 5). Indeed, the

Die parietalen Mechanismen, welche räumliche Transformationen unterstützen, können ideal geeignet sein, arithmetische Transformationen zu unterstützen

Therefore, the parietal mechanisms that are thought to support spatial transformations might also be ideally suited to supporting arithmetic transformations.

Future studies can test this prediction by comparing
(Hubbard, Piazza, Pinel, & Dehaene 2005, p. 445)

Fakten

Im Mathematikunterricht geht es permanent um das Visualisieren von,

- Objekten
- Relationen
- Prozessen

Konsequenzen

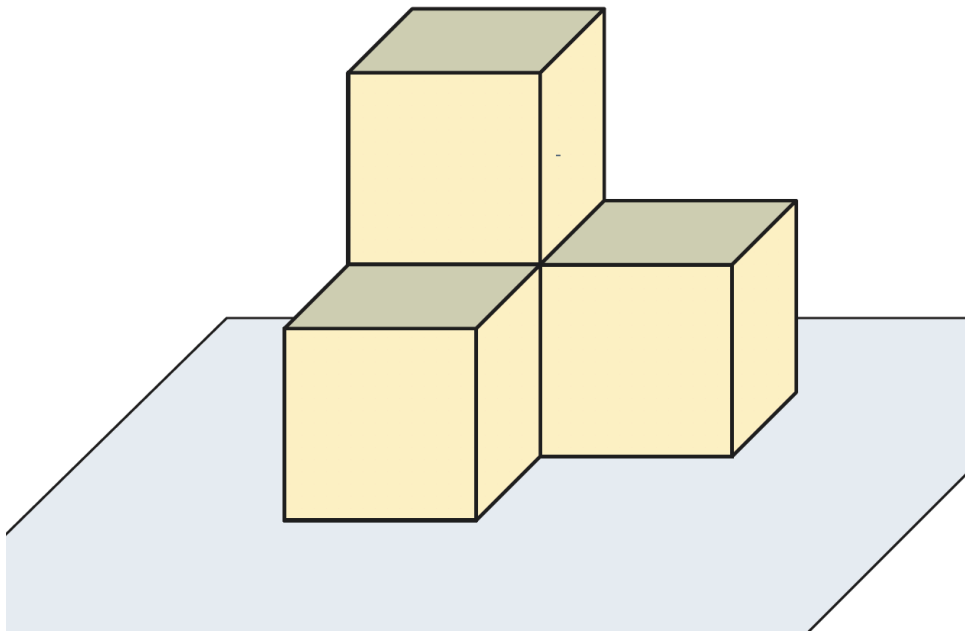
Befähige die Kinder zum Wahrnehmen von:

- Objekten
- Relationen
- Operationen

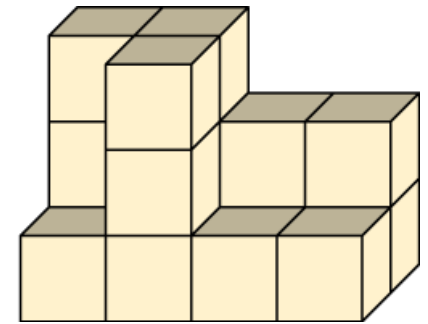
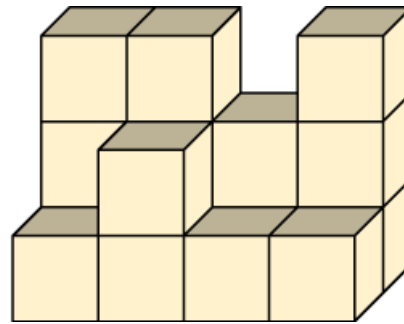
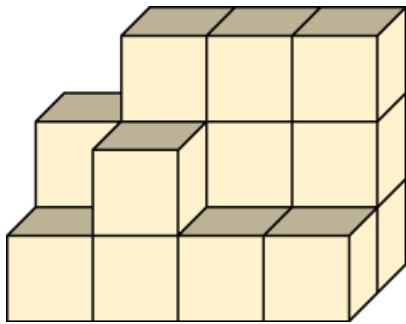
Dann fordere die Kinder zur Vorstellung auf von

- Objekten
- Relationen
- Operationen

Wie viele? – Ein Objekt vorstellen

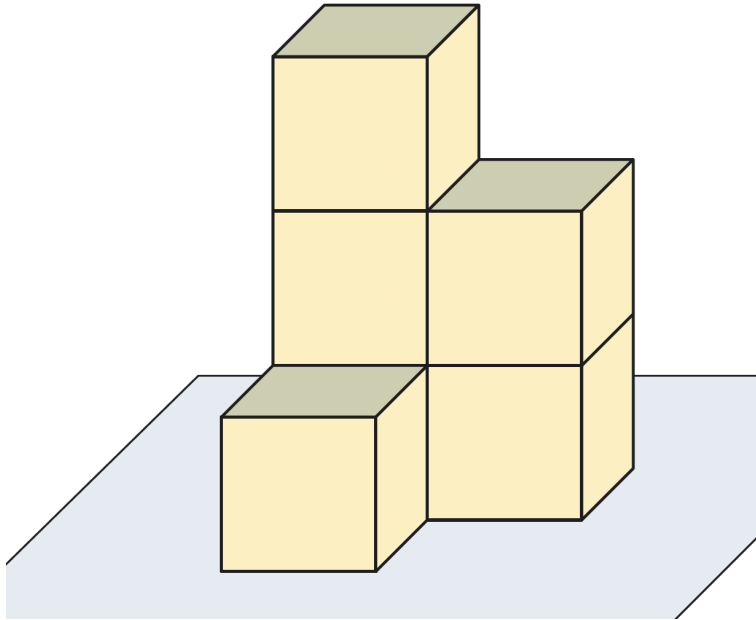


Wie viele? – Einen Prozess vorstellen



Mental umordnen und Invarianz erfassen

Wie viele? – Verschiedene Lösungswege

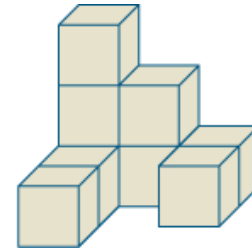
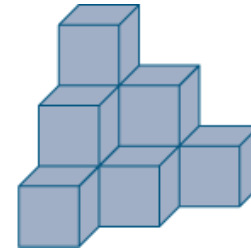
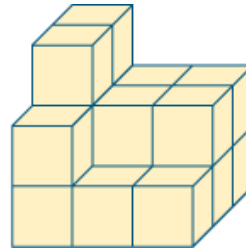
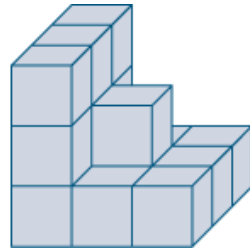
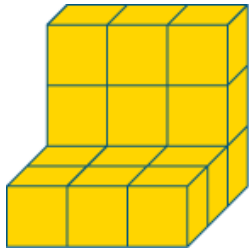


Verschiedene Sichtweisen:

- "4, 5, 6" (Hinten der Vierer) – Vorstellung eines Objektes
- "4, 6" (links-rechts) - Vorstellung eines Objektes
- 6 (weil der runtergefallen ist) - Vorstellung eines Prozesses

Analyse von Würfelbauwerken

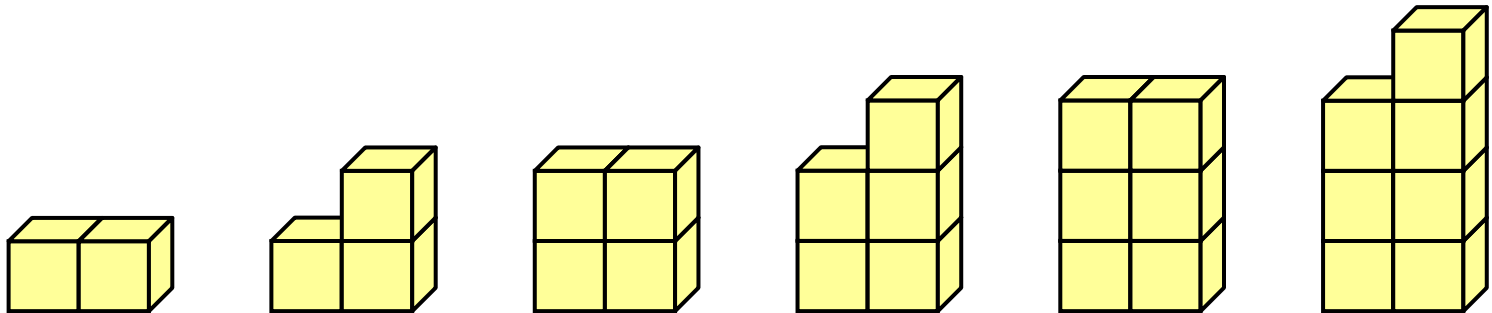
Es war ein $3 \times 3 \times 3$ Würfel. Wie viele kleine Würfel wurden weggenommen?



Mögliche Strategien zum Lösen der Aufgabe:

- gedankliches „Auffüllen“ einzeln
- gedanklich mit kompakten Anordnungen auffüllen (etwa das erste Bauwerk mit zwei „Sechsern“)
- nutzen eines vorherigen Bauwerks, etwa von (1) zu (2)
- mentales Umordnen (etwa beim dritten Bauwerk)
- erfassen der Anzahl und berechnen der Differenz

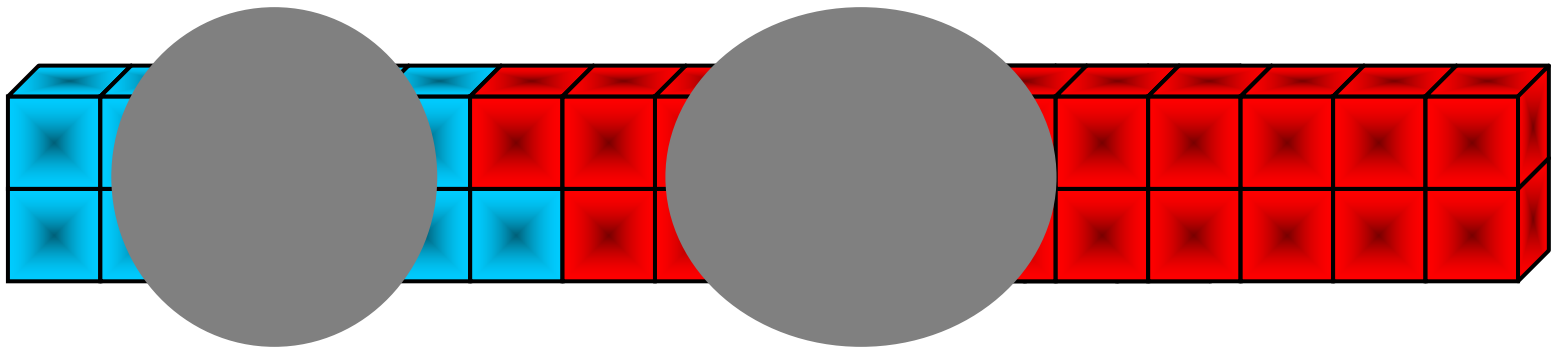
Eigenschaften von Zahlen visualisieren



Es gibt gerade und ungerade Zahlen.
Welche Zahlen sind gerade?

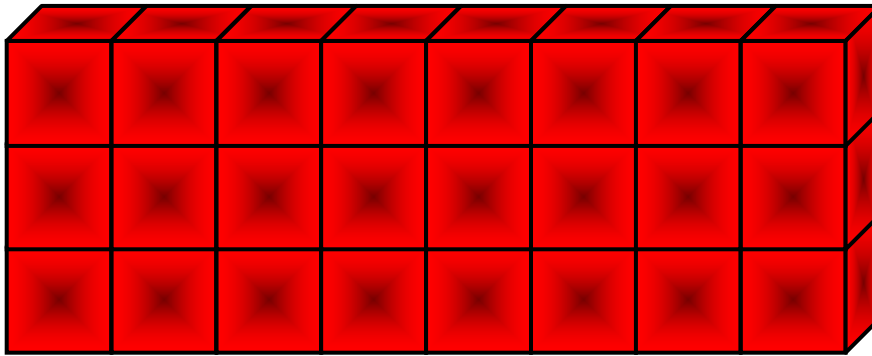
aus: MATHEMATIKUS (Kl.1! - und später - Spiralen!!!)

Eigenschaften von Zahlen visualisieren



Die Summe zweier ungerader Zahlen ist *stets* gerade.

Eigenschaften von Zahlen visualisieren



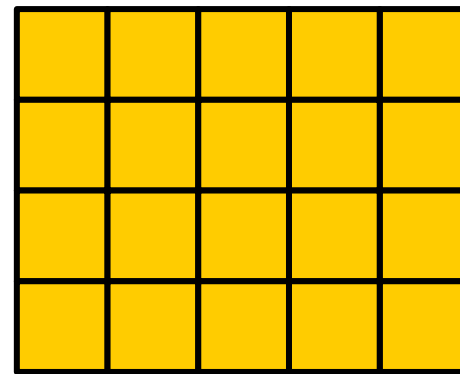
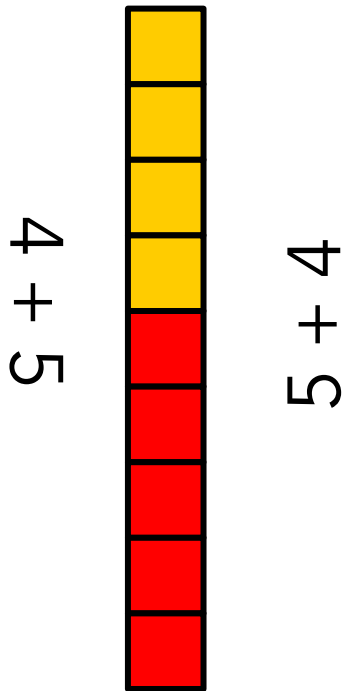
Lege mit (4, 6, 7, 9, 12, 16, 18, 24) Würfeln Vierecke aus.

- Bei welchen Zahlen gibt es viele Möglichkeiten?
- Bei welchen Zahlen kannst du Quadrate legen?
- Bei welchen Zahlen werden es nur „Schlangen“?

aus: MATHEMATIKUS (Kl.1 - und später – spiralförmiges Arbeiten!!!)

Eigenschaften von Operationen „einsehen“

Kommutativität von Addition und Multiplikation

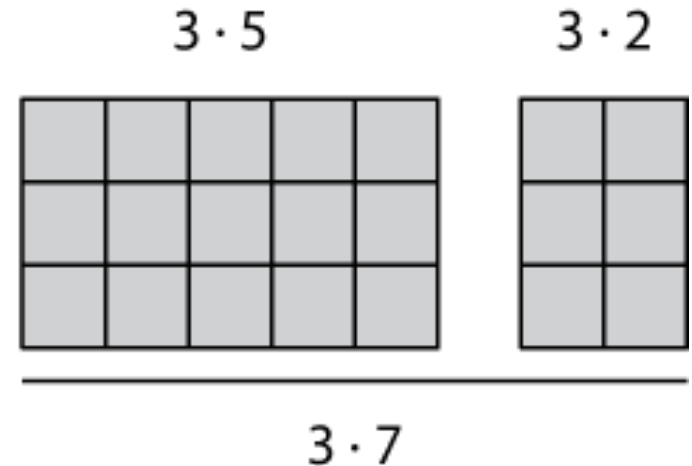
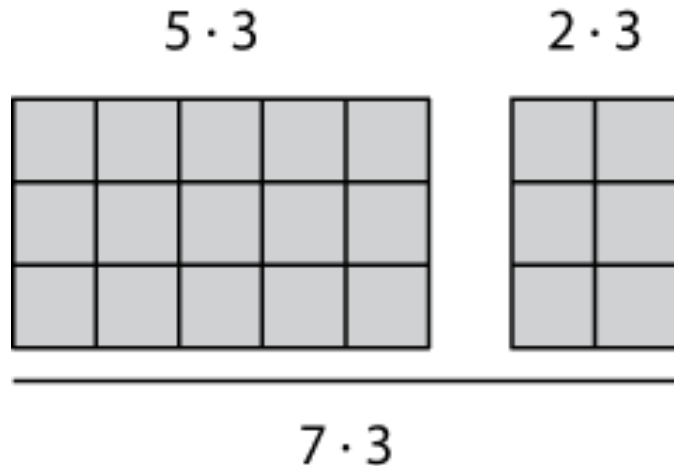


$$4 \cdot 5$$

$$5 \cdot 4$$

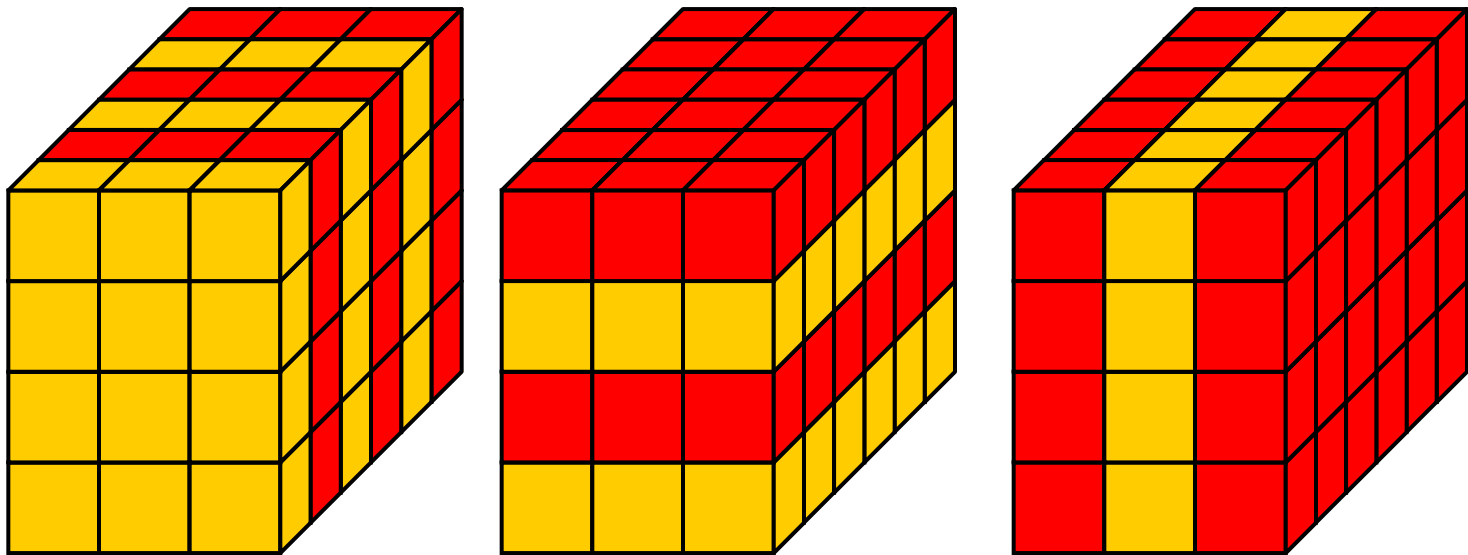
Eigenschaften von Operationen „einsehen“

Distributivgesetz der Multiplikation
bezüglich der Addition



Eigenschaften von Operationen „einsehen“

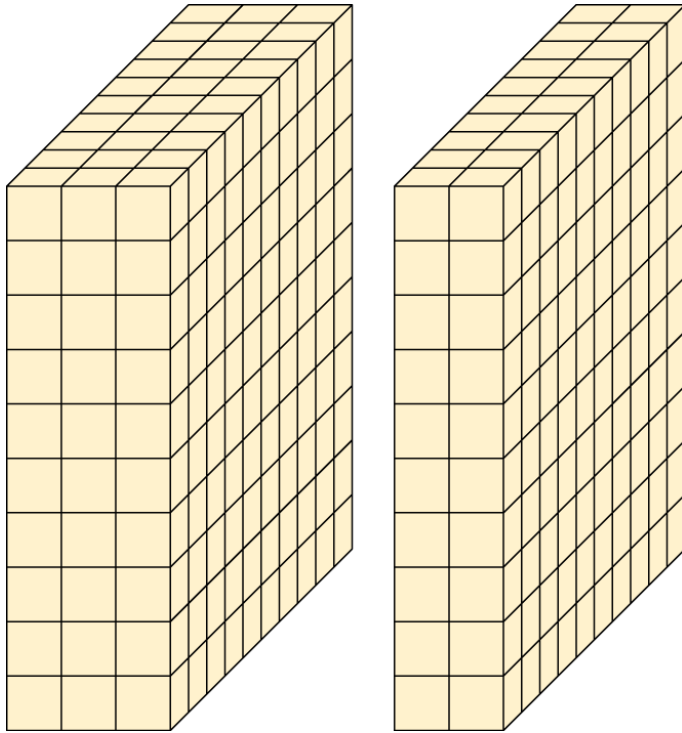
Assoziativität der Multiplikation



$$6 \cdot (3 \cdot 4) = (6 \cdot 3) \cdot 4$$

$$4 \cdot (6 \cdot 3) = (4 \cdot 6) \cdot 3$$

Rechnen – Übertragen bekannter Aufgaben



Erkläre, warum diese Aufgaben zum Bild passen!

$$3 + 2$$

$$5 - 2$$

$$300 + 200$$

$$500 - 200$$

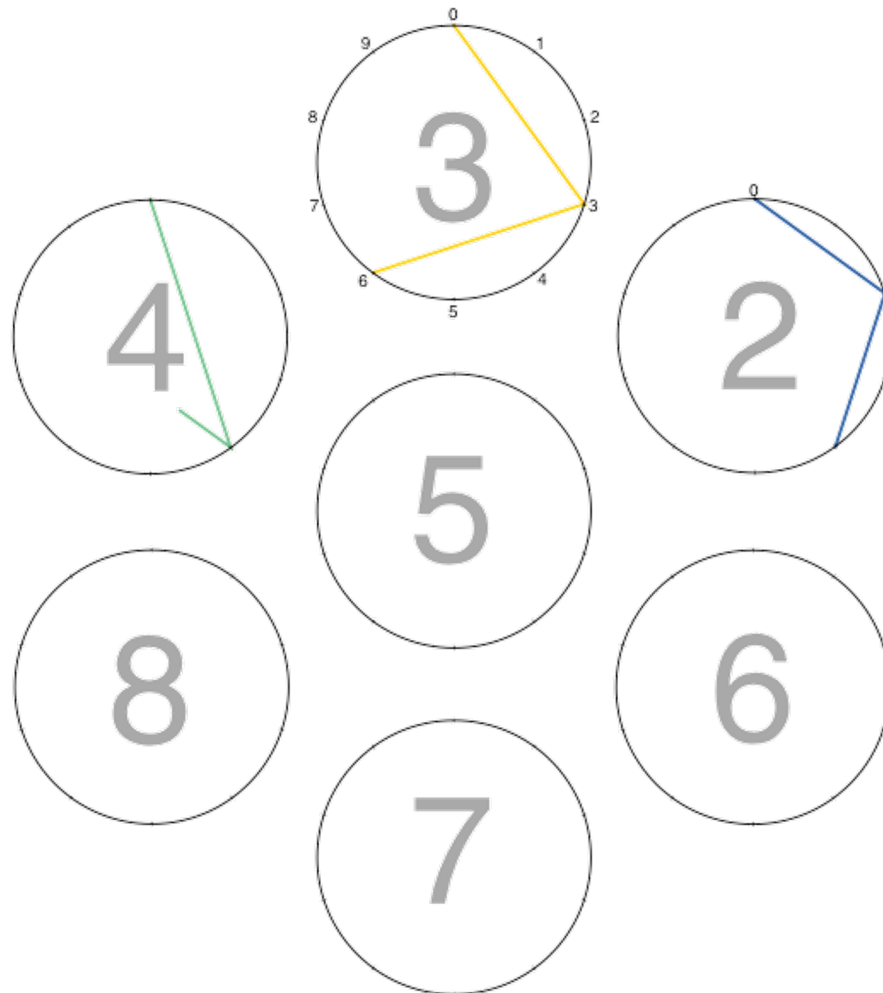
Ein moderner Mathematikunterricht ...

... verbindet Arithmetik und Geometrie:

- Arithmetische Fakten werden mit geometrischen Objekten, Bildern, Aktivitäten illustriert (z.B. dass die Summe zweier gerader Zahlen gerade ist).
- Geometrische Sachverhalte sind sind Ausgangspunkt für arithmetische Überlegungen und Aktivitäten.

Geometrisches als Anlass für arithmetic

Example: Circles of ten



Literatur

- Conway, J. H. & Guy, R. K. (1996). *The Book of Numbers*. New York: Springer, pp. 30-62
- Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). *Learning and Teaching with Understanding*. In D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan. 65-97.
- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Hubbard, E. M., Piazza, M., Pinel, P., & Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience*, 6(6), 435- 448.
doi:10.1038/nrn1684
- Lorenz, J. H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht - Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe.
- Nelson, R. B. (1993). *Proofs without words*. Washington: MAA (Mathematical Association of America)
- Povey, H. (2017). *Engaging (with) Mathematics and Learning to Teach*. Münster: WTM
- Van de Walle, J. A. (2015): *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Global Edition. New York: Longman.
- Weisstein, E. W.: Figurate Number. From MathWorld – a Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/FigurateNumber.html>
- Ziegenbalg, J. (2018). *Figurierte Zahlen - Veranschaulichung als heuristische Strategie*. Wiesbaden: Springer